PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN TÍCH PHÂN HÀM ẨN NHẰM PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC TƯ DUY CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN, TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2

Phạm Thanh Giang[1], Dương Thu Hương[2], Nguyễn Văn Mạnh[2], Trần Thị Thu[2]

Tóm tắt: *Toán học có điều kiện tốt để phát triển tư duy, suy luận cho sinh viên nói chung, năng lực tư duy, suy luận toán học nói riêng. Nghiên cứu này nhằm góp phần tìm ra một số biện pháp phát triển tư duy, suy luận toán học cho sinh viên học toán thông qua dạy học chủ đề" Tích phân hàm ẩn". Các biện pháp này tập trung vào việc rèn luyện, bồi dưỡng các thao tác tư duy cho sinh viên thông qua việc tổ chức cho người học giải một lớp các bài toán có nội dung khó, thường xuất hiện trong các đề thi THPT Quốc gia. Các biện pháp này không chỉ giúp phát triển tư duy của sinh viên mà còn giúp họ rèn luyện kĩ năng giải toán.*

Từ khóa: *chủ đề Toán học, tích phân hàm ẩn, hàm hợp, phương trình vi phân, phương trình hàm*

1. MỞ ĐẦU

Trong Chương trình GDPT ban hành năm 2018[3], giáo dục toán học có vai trò hình thành và phát triển cho học sinh những phẩm chất chủ yếu, năng lực chung và năng lực toán học với các thành tố cốt lõi là: năng lực tư duy và lập luận toán học, năng lực mô hình hóa toán học, năng lực giải quyết vấn đề toán học, năng lực giao tiếp toán học, năng lực sử dụng các công cụ và phương tiện học toán; phát triển kiến thức, kỹ năng then chốt và tạo cơ hội để học sinh trải nghiệm, áp dụng toán học vào đời sống thực tiễn. Như vậy, giáo dục toán học tạo dựng sự kết nối giữa các ý tưởng toán học, giữa toán học với các môn học khác và giữa toán học với đời sống thực tiễn. Điều này dẫn đến sự cần thiết phải có những thay đổi quan trọng về thiết kế chương trình và tổ chức dạy học trong đào tạo sinh viên ngành sư phạm toán học.

Tích phân hàm ẩn là dạng toán khó thường xuất hiện trong các bài thi môn Toán trong kì thi THPT Quốc gia cũng như nhiều bài thi môn Toán trong môn Toán sơ cấp ở các trường đại học, cao đẳng.

[1] Trường THPT Hà Bắc, Hải Dương

[2] Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2

[3] Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán (ban hành theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018).

Câu 48: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{2}{9}$ và $f'(x) = 2x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{35}{36}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $-\frac{19}{36}$. **D.** $-\frac{2}{15}$.

Hình trên được lấy từ đề thi THPTQG môn Toán, năm 2018, mã đề 101. Với học sinh THPT, để có thể hiểu và làm được bài toán trên cùng với các bài toán liên quan khác là khá khó khăn. Hầu như các em đều dập khuôn máy móc áp dụng cách làm mà các thầy cô cung cấp. Chúng tôi đã làm một bảng điều tra thực tế tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2, với quy mô khoảng 1500 sinh viên đang học một số môn Toán. Với các câu hỏi: Bạn biết tích phân hàm ẩn không? Bạn có biết làm tích phân hàm ẩn hay không? Phương pháp mà bạn áp dụng để làm tích phân hàm ẩn là gì? Thông qua khảo sát từ tháng 02/2020 đến tháng 04/2022, chúng tôi thu được kết quả như sau:

+ Khoảng 64,3% số sinh viên được khảo sát chưa biết hết các phương pháp giải tích phân hàm ẩn hoặc gặp khó khăn trong việc xác định dạng bài tập

+ Khoảng 20% số sinh viên được khảo sát biết làm bài tập nhưng chưa trả lời được câu hỏi chỉ ra sự tồn tại hàm số liên quan đến tích phân hàm ẩn.

+ Còn lại, khoảng 15,7% số sinh viên được khảo sát biết làm bài tập nhưng mắc sai lầm trong lời giải và cho rằng giả thiết bài toán đưa ra bị "thừa".

Thông qua khảo sát trên, chúng tôi thấy rằng tất cả các bạn tham gia khảo sát đã học về tích phân hàm ẩn khi còn ngồi trên ghế nhà trường phổ thông. Tuy nhiên, thực trạng hiểu biết về tích phân hàm ẩn, hiểu được bản chất của tích phân hàm ẩn và cách tiếp cận phương pháp giải của các bạn sinh viên Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 còn nhiều hạn chế. Hơn nữa, hiện tại cũng chưa có tài liệu chính thống nào đề cập tới tích phân hàm ẩn một cách đầy đủ, chính xác và khoa học. Chúng tôi đã cố gắng tìm tòi và xâu chuỗi rất nhiều kiến thức để có thể làm rõ bài toán liên quan đến tích phân hàm ẩn. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra những định nghĩa, tính chất, một số bài toán tích phân hàm ẩn và phương pháp giải chúng. Qua đó, chúng tôi mong muốn năng lực tư duy Toán học về các bài toán tích phân hàm ẩn của các bạn học sinh, sinh viên ngành Toán đặc biệt là các sinh viên yêu Toán, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2 sẽ được nâng cao, bồi dưỡng và các bạn có thể nắm được, hiểu, tự làm và sáng tạo ra được các bài toán liên quan đến tích phân hàm ẩn.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Về năng lực tư duy

Theo từ điển Triết học: Tư duy, sản phẩm cao nhất của cái vật chất được tổ chức một cách đặc biệt là bộ não, là quá trình phản ánh tích cực thế giới khách quan trong các khái niệm, phán đoán, lí luận. Tư duy xuất hiện trong quá trình hoạt động sản xuất xã hội của con người và bảo đảm phản ánh thực tại một cách gián tiếp, phát hiện những mối liên hệ hợp quy luật của thực tại, tư duy chỉ tồn tại trong mối liên hệ không thể tách rời khỏi hoạt động lao động và lời nói, là hoạt động chỉ tiêu biểu cho xã hội loài người. Cho nên tư duy con người được thực hiện trong mối liên hệ chặt chẽ nhất với lời nói, và những kết quả của tư duy được ghi nhận trong ngôn ngữ. Tiêu biểu cho tư duy là những quá trình như trừu tượng hóa, phân tích và tổng hợp, việc nêu lên những vấn đề nhất định và tìm cách giải quyết chúng, việc đề xuất những giả thiết, những ý niệm. Kết quả của quá trình tư duy bao giờ cũng là một ý nghĩ nào đó… Tư duy con người được nghiên cứu trong những lĩnh vực khoa học khác nhau và bằng những phương pháp khác nhau[1].

Tư duy toán học được hiểu, thứ nhất là hình thức biểu lộ tư duy biện chứng trong quá trình con người nhận thức khoa học toán học hay trong quá trình áp dụng Toán học vào các khoa học khác như kỹ thuật, kinh tế quốc dân. Thứ hai, tư duy toán học có các tính chất đặc thù được quy định bởi bản chất của khoa học toán học bởi sự áp dụng các phương pháp toán học để nhận thức các hiện tượng thế giới hiện thực, cũng như bởi chính các phương thức chung của tư duy mà nó sử dụng. Hình thức của tư duy toán học là khái niệm, phán đoán (tiên đề, định lí), suy luận, các qui tắc suy luận, các phương pháp xây dựng lý thuyết". Các thao tác tư duy bao gồm: Phân tích, tổng hợp, tương tự, trừu tượng hóa, khái quát hóa[2].

Cụm từ "tư duy toán học" đã được sử dụng một cách rất phổ biến, trong dạy học, trong đánh giá kết quả học tập. Rõ ràng, một sinh viên yếu về toán thì không thể tốt về tư duy toán học nhưng một sinh viên có kĩ năng giải Toán tốt chưa chắc đã có tư duy toán học tốt. Tư duy toán học không chỉ là thành phần quan trọng trong quá trình hoạt động toán học của sinh viên, nó còn là thành phần mà, nếu thiếu sự phát triển một cách có phương hướng thì không thể đạt được hiệu quả trong việc truyền thụ cho học sinh hệ thống các kiến thức và kỹ năng toán học. Trong nghiên cứu này, chúng tôi xem lập luận là một thành phần, một phương thức đặc thù của tư duy toán học và là một thành phần của năng lực toán học, tập trung vào khả năng của sinh viên thực hiện hoạt động suy luận. Từ đó, chúng tôi xác định năng lực tư duy và lập luận toán học của sinh viên trong giải bài tập Toán gồm các biểu hiện là: Kĩ năng lập luận để nhận diện bài toán và kiến thức có liên quan; Kĩ năng lập luận để tìm đoán và lựa chọn đường lối giải; Kĩ năng lập luận

1 https://moet.gov.vn/content/vanban/Lists/VBDH/Attachments/2730/GT%20h%E1%BB%8Dc%20ph%E1%BA%A7n%20Tri%E1%BA%BFt%20h%E1%BB%8Dc%20MLN%20(C)%20Tr%2057%20-Tr150.pdf).

2 http://philosophy.vass.gov.vn/KHCN-MT/Quan-diem-duy-vat-bien-chung-ve-doi-tuong-cua-toan-hoc-24.0

để thực hiện quá trình giải bài toán; Kĩ năng lập luận để đánh giá quá trình giải và nghiên cứu sâu bài toán[1].

2.2. Về chủ đề tích phân hàm ẩn

2.2.1. Một số kiến thức liên quan

Định nghĩa tích phân xác định [4] xuất hiện trong bài toán tính diện tích của hình thang cong (hình thang có ít nhất một cạnh cong). Định nghĩa đó được xây dựng dựa trên các kiến thức về hàm số, giới hạn hàm số khá phức tạp nên chúng tôi chọn cách sử dụng nó để có định nghĩa đơn giản sau đây:

Định nghĩa 2.1: Cho f là một hàm số liên tục trên $[a,b]$. Giả sử $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a,b]$. Tích phân xác định của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$ kí hiệu là $\int_a^b f(t)\,dt$ và được định nghĩa là $\int_a^b f(t)\,dt=\Phi(b)-\Phi(a)$. Khi đó ta cũng nói rằng hàm $f(x)$ là một hàm khả tích trên đoạn $[a,b]$.

Ví dụ 2.1: Tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Tích phân có rất nhiều tính chất, các tính chất này hầu hết đã được giới thiệu và chứng minh đầy đủ trong các tài liệu [4]. Chúng tôi chỉ liệt kê một vài tính chất trong phạm vi bài báo

Định lý 2.1:

1) Tích phân $\int_a^a f(x)\,dx=0,\ \forall a\in\mathbb{R},$ với mọi hàm $f(x)$ khả tích

2) Nếu f khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx.$

3) Nếu f và g là hai hàm khả tích trên $[a,b]$ và $\alpha,\ \beta$ là các hằng số thực thì $\alpha f+\beta g$ cũng là một hàm khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b\left[\alpha f(x)+\beta g(x)\right]dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

3 https://o2.edu.vn/cac-bieu-hien-cua-nang-luc-toan-hoc/#:~:text=1.,N%C4%83ng%20l%E1%BB%B1c%20t%C6%B0%20duy%20v%C3%A0%20l%E1%BA%ADp%20lu%E1%BA%ADn%20to%C3%A1n%20h%E1%BB%8Dc,l%C3%AD%20tr%C6%B0%E1%BB%9Bc%20khi%20k%E1%BA%BFt%20lu%E1%BA%ADn.

4) Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, khi đó nếu f khả tích trên $[a,c]$ và $[c,b]$ với $a\le c\le b$ thì f khả tích trên $[a,b]$ và

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

5) Nếu f khả tích trên đoạn $[a,b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx.$

6) Nếu hàm f liên tục trên $[a,b]$ thì khả tích trên đoạn đó.

7) Nếu hàm f bị chặn trên đoạn $[a,b]$ và có hữu hạn điểm gián đoạn thì khả tích trên đoạn đó.

Ví dụ 2.2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{khi } x\ne 1\\ 10 & \text{khi } x=1\end{cases}$. Tính $\int_0^2 f(x)\,dx.$

Lời giải: Ta thấy hàm $f(x)$ không sơ cấp nên tính $\int_0^2 f(x)\,dx$ gặp khó khăn. Tuy nhiên, nếu chọn $g(x)=2x+3$ ta thấy $f(x)=g(x)$ tại mọi điểm khác 1 và áp dụng Tính chất 5, Định lý 2.1, ta được

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^2 (2x+3)\,dx=x^2+3x\Big|_0^2=10.$$

Để tính được các tích phân cơ bản, ta có thể dùng định nghĩa, phép đổi biến số và tích phân từng phần. Các kiến thức này đã được trình bày rất rõ trong các tài liệu [4] nên chúng tôi chỉ đưa ra một vài ví dụ minh họa.

Ví dụ 2.3: Bằng cách vận dụng bảng nguyên hàm, tính $I=\int_0^\pi (2\sin x-\cos x)\,dx$

Lời giải: Ta có $I=\int_0^\pi (2\sin x-\cos x)\,dx=(-2\cos x-\sin x)\Big|_0^\pi=4.$

Ví dụ 2.4: Bằng cách đổi biến số, tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}\,dx.$

Lời giải: Đặt $t=\tan x,$ ta có

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\tan^4 x}{\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{t^4}{1-t^2}dt=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\left(-t^2-1+\frac{1}{1-t^2}\right)dt$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}-t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{10}{9\sqrt{3}}.$$

Ví dụ 2.5: Bằng cách tính tích phân từng phần, tính tích phân $I=\int_1^2\frac{\ln x}{x^3}dx.$

Lời giải: Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{x^3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=-\dfrac{1}{2x^2}\end{cases}$

Khi đó $I=-\frac{1}{2x^2}\ln x\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{2x^3}dx=-\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4x^2}\Big|_1^2=-\frac{1}{8}\ln 2+\frac{3}{16}.$

Định nghĩa 2.2: Cho $X,Y,Z\subset\mathbb{R}$ và hai hàm số

$$\begin{aligned}f:X&\to Y\\ x&\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}g:Y&\to Z\\ y&\mapsto z=g(y)\end{aligned}$$

Khi đó, hàm hợp kí hiệu là $g\circ f$ là hàm đi từ X vào Z theo quy tắc như sau

$$\begin{aligned}g\circ f:X&\to Z\\ x&\mapsto z=g(f(x)).\end{aligned}$$

Ví dụ 2.6: Cho $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ và $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được xác định bởi $f(x)=2x;\ g(x)=x^2.$

Tính $(f\circ g)(x)$ và $(g\circ f)(x).$

Lời giải: Ta có

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2)=2x^2\ .$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2x)=(2x)^2=4x^2.$$

Phép toán hợp của hai hàm số đóng vai trò lớn trong giải tích vì phần lớn các hàm số thường gặp đều được biểu diễn bằng hợp của hai hay nhiều hàm số. Phần tiếp theo, chúng tôi đưa ra một sự kết hợp giữa cấu trúc nhóm và phép toán hợp. Kiến thức mục này được tham khảo trong tài liệu [3].

Định nghĩa 2.3: Cho các hàm

$$g_j : X \to X$$
$$x \mapsto g_j(x),\ j \in \mathbb{N}.$$

Đặt $G = \{g_1(x),\ g_2(x), ..., g_j(x)\ \}$, ta nói G lập thành một nhóm hàm số với phép toán lấy hàm hợp nếu đồng thời thỏa mãn điều kiện sau:

i) Hàm $e \in G,$ trong đó e là hàm số đồng nhất trên X nghĩa là $e(x) = x,\ \forall x \in X.$

ii) Với mọi hàm $g_1, g_2 \in G$ thì $g_1 \circ g_2 \in G$ và $g_2 \circ g_1 \in G.$

iii)Với mọi hàm $g \in G$ tồn tại hàm số ngược g^{-1} và $g^{-1} \in G.$

Ví dụ 2.7: Chứng minh tập hàm $G := \left\{ x; \frac{a}{x} \middle| x; a \in \mathbb{R}^* \right\}$ lập thành nhóm với phép toán hợp các hàm số.

Lời giải: Ta cần chỉ ra G thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii) ở định nghĩa trên. Thật vậy

- Ta có $g_1(x) = x$ nên $g_1(x)$ là hàm số đồng nhất trên $\mathbb{R}^*$. Do đó (i) thỏa mãn.

- Với mọi $g_1 = x \in G$ và $g_2 = \frac{a}{x} \in G.$ Ta có

$$(g_1 \circ g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = g_1\left(\frac{a}{x}\right) = \frac{a}{x} \in G,\quad (g_2 \circ g_1)(x) = g_2(g_1(x)) = g_2(x) = \frac{a}{x} \in G.$$

Do đó (ii) thỏa mãn

- Với mọi $g_1 = x \in G,\ \ g_2 = \frac{a}{x} \in G$. Ta có $g_1(x) = x$ có hàm ngược là $g_1^{-1}(x) = x \in G.$

Với $g_2(x) = \frac{a}{x}$ ta đặt $\frac{a}{x} = y$ nên $x = \frac{a}{y}$ do đó $g_2(x)$ có hàm ngược là $g_2^{-1} = \frac{a}{x} \in G.$

Do đó (iii) thỏa mãn

Định nghĩa 2.4: Nếu nhóm các hàm số với phép toán lập thành hàm hợp gồm hữu hạn phần tử, tức là $G := \{g_1; g_2; ...; g_n\}$ thì nó được gọi là nhóm hữu hạn.

Ví dụ 2.8: Hàm $G := \left\{ x; \frac{a}{x} \middle| a - \text{const}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$ là nhóm hữu hạn.

Nhận xét 2.1: Ngoài ví dụ trên, ta dễ dàng chứng minh được các ví dụ sau là nhóm hữu hạn với phép toán lấy hàm số hợp.

1. $G := \left\{ x; \frac{1}{1-x}; \frac{x-1}{x} \middle| x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \right\}.$
2. $G := \left\{ x; a-x \middle| a - \text{const}; x \in \mathbb{R} \right\}.$
3. $G := \left\{ x; \frac{a}{x}; -x; -\frac{a}{x} \middle| a - \text{const}; x \in \mathbb{R}^* \right\}.$

Phần tiếp theo, chúng tôi cung cấp một số thông tin liên quan đến phương trình vi phân, phần này được tham khảo trong tài liệu [2].

Định nghĩa 2.5: Phương trình vi phân cấp một là phương trình có dạng

$$F(x, y', y) = 0,$$

trong đó F là hàm xác định trong miền $G \subset \mathbb{R}^3$; $x \in I = (a,b)$ và hàm $y = y(x)$ là hàm số cần tìm; $y' = y'(x)$ là đạo hàm của hàm cần tìm.

Ví dụ 2.9: Phương trình $y' - 2y + 3x = 0$ là phương trình vi phân cấp một.

Định nghĩa 2.6: Hàm $y = \varphi(x)$ xác định và khả vi trên $I = (a,b)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu

(i) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$ với mọi $x \in I$.

(ii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0$ trên I.

Ví dụ 2.10: Phương trình $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ có một nghiệm là hàm $y = x^2 + x$.

Phương trình vi phân nếu có nghiệm sẽ có vô số nghiệm, tuy nhiên áp dụng định lý Cauchy – Picard, chúng ta thu được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân. Tính tồn tại và duy nhất nghiệm này sẽ có ý nghĩa với những bài toàn liên quan đến tích phân hàm ẩn sau này. Sau đây, các tác giả đề cập đến một số lớp phương trình vi phân thường gặp thỏa mãn định lý Cauchy – Picard.

Định nghĩa 2.9: Phương trình biến số phân ly là phương trình có dạng

$$f(x)dx + g(y)dy = 0,$$

trong đó $f(x), g(y)$ là những hàm liên tục theo biến x, y tương ứng.

Nhận xét 2.2: Để giải phương trình, ta chỉ cần lấy tích phân hai vế, được nghiệm

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = C.$$

Ví dụ 2.11: Tìm nghiệm của phương trình: $(4x+1)dx - y^2 dy = 0.$

Lời giải: Lấy tích phân hai vế của phương trình, ta được

$$(4x+1)dx - y^2dy = 0 \Leftrightarrow \int (4x+1)dx - \int y^2dy = C \Leftrightarrow 2x^2 + x - \frac{y^3}{3} = C.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $2x^2 + x - \frac{y^3}{3} = C.$

Định nghĩa: 2.10: Phương trình vi phân tuyến tính cấp một là phương trình có dạng

$$y' + p(x)y = q(x), \qquad (1.3)$$

trong đó $p(x), q(x)$ là các hàm liên tục trên khoảng (a,b).

Nhận xét 2.3: Dựa vào phương pháp biến thiên hằng số Lagrange, ta thu được nghiệm tổng quát của phương trình (1.3) là

$$y = e^{-\int p(x)}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right].$$

Ví dụ 2.12: Giải phương trình $y' - \frac{1}{x}y = x^3$

Lời giải: Áp dụng công thức nghiệm tổng quát ở Nhận xét 2.3 ta được

$$y = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[\int x^3 e^{\int -\frac{1}{x}dx}dx + C\right]$$

$$= x\left[\int x^2dx + C\right]$$

$$= Cx + \int x^3dx = \frac{x^4}{4} + Cx.$$

Mục tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến phương trình hàm. Đây là phần kiến thức trong chuyên đề ôn luyện học sinh giỏi THPT. Các thông tin đưa ra được tham khảo trong tài liệu [1]. Như chúng ta đã biết, phương trình hàm là một phương trình mà yếu tố chưa biết là hàm số. Ví dụ như: Tìm hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f(-x) = 2x,\ \forall x \in \mathbb{R}^*$. Nghiệm của phương trình hàm là hàm số thỏa mãn phương tình đã cho. Tuy nhiên, tính tồn tại và duy nhất nghiệm của phương tình hàm còn nhiều vấn đề phải quan tâm. Nghĩa là, có nhiều bài toán giải phương trình hàm vô nghiệm hoặc không có nghiệm duy nhất. Phương trình hàm không có cách giải tổng quát. Với mỗi bài toán tùy vào từng điều kiện mà ta áp dụng cách giải sao cho phù hợp. Ta thường áp dụng các cách sau: Phương trình hàm sử dụng tính khả vi, phương trình hàm sử dụng tính liên tục, phương trình hàm sử dụng phép thế các giá trị đặc biệt. Sau đây, ta xét bài toán phương trình hàm có dạng

$$a_1(x)f(g_1(x)) + a_2(x)f(g_2(x)) + \dots + a_n(x)f(g_n(x)) = b(x) \quad (*),$$

trong đó $a_1(x);a_2(x);...;a_n(x)$ và $b(x)$ là các hàm số từ X vào X cho trước, còn tập

$$G:=\{g_1(x)=x;g_2(x);...;g_n(x)\},\ (x\in X)$$

là nhóm hữu hạn với phép toán lập thành hàm số hợp.

Từ tính chất của một nhóm hữu hạn, ta có thể đưa ra lời giải bằng cách trong (*) ta lần lượt thế

$$x:\sim g_2(x);x:\sim g_3(x);...;x:\sim g_n(x)$$

được hệ phương trình với các ẩn là $f(x);f(g_2(x));f(g_3(x));...;f(g_n(x))$. Giải hệ phương trình ta thu được $f(x)$ (nếu có). Đây là chìa khóa quan trọng trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến phương trình hàm ẩn sau này.

Ví dụ 2.13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $\mathbb{R}\setminus[0;1]$ thỏa mãn điều kiện:

$$2f(x)+3f(1-x)=x^2-2x,\qquad \forall x\in[0;1].$$

Tìm $f(x)$.

<u>Lời giải:</u> Thay $x\sim(1-x)$ vào phương trình ban đầu ta thu được hệ

$$\begin{cases}2f(x)+3f(1-x)=x^2-2x\\3f(x)+2f(1-x)=x^2-1\end{cases}$$

Hệ này có nghiệm duy nhất và $5f(x)=x^2+4x-3$ hay $f(x)=\dfrac{x^2+4x-3}{5}$.

Cuối cùng, trong thực tế cuộc sống, ta bắt gặp nhiều bài toán dẫn tới việc tính tích phân hoặc tính toán một vài thứ liên quan đến tích phân mà thay vì biết hàm dưới dấu tích phân, chúng ta chỉ biết một vài tính chất liên quan của nó. Chúng tôi xét ví dụ

Ví dụ 2.14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0,1]$ thỏa mãn

$$(x+1)f'(x)+f(x)=1,\forall x\in[0,1],\text{ biết } f(5)=\frac{7}{5}.$$

Tính giá trị của $I=\int_0^1 f(x)dx.$

Ví dụ trên minh họa cho tích phân hàm ẩn (hàm dưới dấu tích phân không được cho dưới dạng tường minh). Để có thể làm được các bài toán này, đòi hỏi chúng ta phải trả lời được hai câu hỏi. Câu hỏi 1: Liệu có tồn tại hàm số thỏa mãn các điều kiện đầu bài hay không. Câu hỏi 2: Cách làm của dạng bài này là gì. Hai câu hỏi trên sẽ được trả lời cụ thể hơn ở phần tiếp theo.

2.3. Một số phương pháp giải tích phân hàm ẩn

2.3.1. Sử dụng định nghĩa và các tính chất cơ bản của tích phân

Nhận dạng: Khi đề bài cho kết quả các tích phân có cùng cận (trên và dưới) của một hay nhiều hàm số và yêu cầu tính tích phân (cận không đổi) của tổng, hiệu các hàm số. Hoặc khi đề bài cho kết quả các tích phân của cùng một hàm số $f(x)$ và yêu cầu tính tích phân (chỉ khác các tích phân đã cho về cận) của hàm số $f(x)$.

Phương pháp: Ta sử dụng Định lý 2.1, các tính chất từ 1- 7.

Ví dụ 1: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $[2,4]$ có $\int_2^4 f(x)dx = 5$ và $\int_2^4 g(x)dx = 6.$ Tính $I = \int_2^4 [4f(x) - 3g(x)]dx.$

<u>Lời giải:</u> Vì $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $[2,4]$ nên nó khả tích trên [2,4].

Vậy

$$I = \int_2^4 [4f(x) - 3g(x)]dx = 4\int_2^4 f(x)dx - 3\int_2^4 g(x)dx = 4.5 - 3.6 = 2.$$

Bình luận thêm: Ở bài này, ta sẽ có bảng trả lời hai câu hỏi của tích phân hàm ẩn như sau

Câu hỏi	Câu trả lời
1	Chọn hàm $f(x) = 5$ và $g(x) = 6$ là các hàm hằng số, các hàm này hiển nhiên thỏa mãn các yêu cầu đầu bài.
2	Áp dụng tính chất 3, định lý 1, ta thu được ngay kết quả.

Như vậy, dạng bài hàm ẩn này không quá khó. Tuy nhiên, có nhiều học sinh, sinh viên chưa đưa ra câu trả lời cho câu hỏi 1. Vì cận của các tích phân là giống nhau nên chúng ta hoàn toàn có thể chọn các hàm dựa vào đầu bài cho. Giả thiết các hàm $f(x)$ và $g(x)$ liên tục trên [2,4] có vẻ "dư thừa" nhưng là gợi ý để sinh viên chọn được hàm và kiểm tra được tính đúng đắn của bài toán.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[0,4]$, có $\int_1^4 f(x)dx = \frac{21}{2}$ và $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$. Tính $I = \int_0^4 \left(4e^x + 2f(x)\right)dx.$

Lời giải: Vì $f(x)$ xác định và liên tục trên [0,4] nên nó khả tích trên các đoạn con của nó.

Do đó,

$$I = \int_0^4 \left(4e^x + 2f(x)\right)dx = 4\int_0^4 e^x + 2\int_0^4 f(x)dx = \int_0^4 e^x + 2\int_0^1 f(x)dx + 2\int_1^4 f(x)dx$$

$$= 4e^x\Big|_0^4 + 2.\frac{21}{2} + 2.\frac{3}{2} = 4e^4 + 20.$$

Bình luận thêm: Ở bài này, ta sẽ có bảng trả lời hai câu hỏi của tích phân hàm ẩn như sau

Câu hỏi	Câu trả lời
1	Chọn hàm $f(x) = x+1$, hàm này hiển nhiên thỏa mãn các yêu cầu đầu bài.
2	Áp dụng tính chất 4, định lý 1, ta thu được ngay kết quả.

Ở dạng bài này, trả lời câu hỏi 1 phức tạp hơn. Tuy nhiên, nếu người ra đề để ý có thể tự chọn hàm *f(x)* trước rồi tính các tích phân để đưa ra đề bài thì sẽ tránh được những khúc mắc trong khi trả lời các câu hỏi 1,2 liên quan đến tích phân hàm ẩn. Dạng bài này, người học chủ yếu vận dụng tính chất của tích phân để tính chứ không cần chỉ ra trực tiếp hàm *f(x)*.

2.3.2. Phương pháp đổi biến số

Nhận dạng: Khi gặp các tích phân dạng $\int_a^b f\left(u(x), u'(x)\right)dx$ hoặc yêu cầu tính tích phân hàm $f(x)$ biết $g\left(f(x), f(a-x)\right) = h(x)$ (với $h(x)$ là hàm số cho trước)

Phương pháp:

- Khi gặp các tích phân dạng $\int_a^b f\left(u(x), u'(x)\right)dx$ thì ta dùng phương pháp đổi biến đặt $t = u(x)$.
- Khi đề yêu cầu tính tích phân hàm $f(x)$ biết $g\left(f(x), f(a-x)\right) = h(x)$ (với $h(x)$ là hàm số cho trước) ta có thể đổi biến $t = a - x$.

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, biết $\int_1^2 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_0^1 x f(x^2+1)dx$.

Lời giải: Đặt $t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{cases}$

Khi đó $I = \int_0^1 x f(x^2+1)dx = \frac{1}{2}\int_1^2 f(t)dt = \frac{3}{2}$.

Bình luận thêm: Ở bài này, ta sẽ có bảng trả lời hai câu hỏi của tích phân hàm ẩn như sau

Câu hỏi	Câu trả lời
1	Chọn hàm $f(x) = 3$ là hàm hằng số, hàm này hiển nhiên thỏa mãn các yêu cầu đầu bài.
2	Áp dụng phương pháp đổi biến số, ta đưa tích phân cần tính về tích phân quen thuộc.

Phương pháp đổi biến tỏ ra khá hiệu quả trong những dạng bài này. Tuy nhiên, các bạn sinh viên phải nắm rất rõ phương pháp hoặc bản chất của phép đổi biến để có thể đưa ra những phép đổi biến phù hợp.

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và liên tục trên đoạn $[1;2]$ thỏa mãn $f(x) > 0\ \forall x \in [1,2]$, biết $\int_1^2 f'(x)dx = 10$ và $\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln 2$.

Tính $f(2)$.

Lời giải: Đặt $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow t = f(1) \\ x = 2 \Rightarrow t = f(2) \end{cases}$

Do $f(x) > 0\ \forall x \in [1,2] \Rightarrow t > 0$

Khi đó

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int_{f(1)}^{f(2)} \frac{dt}{t} = \ln t\Big|_{f(1)}^{f(2)} = \ln\frac{f(2)}{f(1)} = \ln 2.$$

$$\Rightarrow \frac{f(2)}{f(1)} = 2 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2}f(2),$$

mà $\int_1^2 f'(x)dx = 10 \Rightarrow f(2) - f(1) = 10 \Rightarrow \frac{1}{2}f(2) = 10 \Rightarrow f(2) = 20$.

Vậy $f(2)=20$.

Bình luận thêm: Ở bài này, ta sẽ có bảng trả lời hai câu hỏi của tích phân hàm ẩn như sau

Câu hỏi	**Câu trả lời**
1	Chọn hàm $f(x)=3$ là hàm hằng số, hàm này hiển nhiên thỏa mãn các yêu cầu đầu bài.
2	Áp dụng phương pháp đổi biến số, ta đưa tích phân cần tính về tích phân quen thuộc.

Phương pháp đổi biến tỏ ra khá hiệu quả trong những dạng bài này. Tuy nhiên, các bạn sinh viên phải nắm rất rõ phương pháp hoặc bản chất vấn đề để có thể đưa ra những phép đổi biến phù hợp. Giả thiết cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và liên tục trên đoạn $[1;2]$ là cần thiết để chỉ ra sự tồn tại các tích phân trong bài và gợi ý tìm hàm $f(x)$.

2.3.3. Phương pháp tích phân từng phần

Nhận dạng: Hàm dưới dấu tích phân là tích của hai hàm, trong đó có một hàm có nguyên hàm đơn giản và một hàm liên quan đến $f'(x)$.

Phương pháp: Sử dụng phương pháp tích phân từng phần.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Tính $I=\int\limits_1^5 x f'(x)dx$.

<u>Lời giải:</u> Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases} \Rightarrow I = x f(x)\Big|_1^5 - \int\limits_1^5 f(x)dx$

Từ $f(x^3+3x+1)=3x+2 \Rightarrow \begin{cases} f(5)=5\ (x=1) \\ f(1)=2\ (x=0) \end{cases}$, suy ra $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx$

Đặt $t=x^3+3x+1 \Rightarrow \begin{cases} dt=(3x^2+3)dx \\ f(t)=3x+2 \end{cases}$, đổi cận $\begin{cases} t=1\Rightarrow x=0 \\ t=5\Rightarrow x=1 \end{cases}$

Khi đó $I=23-\int\limits_1^5 f(x)dx = 23-\int\limits_1^5 f(t)dt = 23-\int\limits_0^1 (3x+2)(3x^2+3)dx = \dfrac{33}{4}$.

Bình luận thêm: Ở dạng bài này, thật khó để tìm được hàm $f(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Với những trường hợp này, ta sẽ phải lưu ý rằng. Không nhất thiết phải tìm ra hàm $f(x)$ thỏa mãn đề bài, ta vẫn làm được bài toán. Tuy nhiên cần lưu ý đến việc ra đề bài tránh tình trạng sai đề. Cụ thể hơn trong ví dụ này, hàm $f(x)$ thỏa mãn $f(x^3+3x+1)=3x+2$ có tồn tại, bởi lẽ phương trình $x^3+3x+1=0$ chỉ có duy nhất một nghiệm và phương trình $3x+2=0$ là phương trình bậc nhất, hai điều này đảm bảo cho tính xác định và đơn trị của hàm $f(x)$.

Đôi khi, ở những bài toán, chúng ta không chỉ chỉ dụng riêng từng phương pháp đổi biến hay tích phân từng phần mà chúng ta phải kết hợp hai phương pháp lại với nhau để có được một lời giải hoàn chỉnh cho bài toán. Điển hình là ở các ví dụ sau:

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(2)=16,\ \int_0^2 f(x)\,dx=4.$ Tính $I=\int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right)dx.$

Lời giải: Đặt $\frac{x}{2}=t \Rightarrow x=2t \Rightarrow dx=2dt.$ Đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}.$

Khi đó $I=\int_0^4 x f'\left(\frac{x}{2}\right)dx=4\int_0^2 t f'(t)dt$

Đặt $\begin{cases} u=t \\ dv=f'(t)\,dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dt \\ v=f(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=4\left[tf(t)\Big|_0^2-\int_0^2 f(t)\,dt\right]=4\left[2f(2)-\int_0^2 f(t)\,dt\right]=4(2.16-4)=112$$

Vậy $I=112.$

Ví dụ 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và liên tục trên đoạn $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-2)=1,\ \int_1^2 f(2x-4)\,dx=1.$ Tính $I=\int_{-2}^0 x f'(x)\,dx.$

Lời giải: Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=f'(x)\,dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=f(x) \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_{-2}^0 x f'(x)\,dx=xf(x)\Big|_{-2}^0-\int_{-2}^0 f(x)\,dx=2f(-2)-\int_{-2}^0 f(x)\,dx$$

Đặt $2x-4=t \Rightarrow dx=\frac{dt}{2}.$ Đổi cận $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=-2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}.$

Khi đó $\int\limits_1^2 f(2x-4)dx = \int\limits_{-2}^0 \frac{f(t)}{2}dt = 1 \Rightarrow \int\limits_{-2}^0 f(x)dx = \int\limits_2^0 f(t)dt = 2$

Vậy $I = 2-2 = 0$.

2.3.4. Sử dụng phương trình vi phân

Nhận dạng: Chúng tôi quan tâm tới các bài toán tích phân hàm ẩn mà hàm dưới dấu tích phân có dạng phương trình phân ly biến số hoặc phương trình phân tuyến tính.

Dạng 1: Bài toán có dạng $f'(x) = g(x) \qquad (2.1)$

Dạng 2: Bài toán có dạng $f'(x) + p(x)f(x) = q(x). \qquad (2.2)$

Phương pháp:

– Dạng 1: Biến đổi (2.1) về dạng $\frac{f'(x)}{f(x)} = k(x)$, sau đó tích phân hai vế ta tìm được $f(x)$.

– Dạng 2: Theo lý thuyết phương trình vi phân ta có

$$y = e^{-\int p(x)}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

là nghiệm của phương trình trên. Do đó, nếu không muốn áp dụng trực tiếp công thức này để tìm hàm f(x) thì bằng cách nhân cả hai vế của phương trình (2.2) với $e^{\int p(x)dx}$ thì ta đưa được phương trình (2.2) về dạng

$\left[A(x).f(x)\right]' = B(x)$.

Sau đó nguyên hàm hai vế ta tìm được $f(x)$. Cách này, học sinh THPT sẽ hoàn toàn thích thú và làm được bài.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f'(x) = -e^{2x}f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ biết } f(0) = \frac{1}{2}. \text{ Tính giá trị } f(\ln 5).$$

<u>Lời giải</u>: Ta có $f'(x) = -e^{2x}f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^{-2x}$.

Lấy nguyên hàm hai vế ta được

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int -e^{-2x}dx \Leftrightarrow \int \frac{d(f(x))}{f^2(x)} = \int -e^{-2x}dx \Leftrightarrow \frac{-1}{f(x)} = \frac{1}{2}e^{-2x} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Theo giả thiết

$$f(0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{-1}{f(0)}=\frac{1}{2}e^0+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}.$$

Khi đó $\frac{-1}{f(x)}=\frac{1}{2}e^{-2x}-\frac{3}{2}$. Vậy $f(\ln 5)=\frac{25}{37}$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$f'(x)-2xf(x)=2xe^{x^2}$ và $f(0)=-2$. Tính $f(1)$.

Lời giải:

Ta có $p(x)=x$ nên $\int p(x)dx=\frac{x^2}{2}$ nên nhân cả hai về giả thiết với $e^{\frac{x^2}{2}}$ ta được

$$e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)+e^{\frac{x^2}{2}}xf(x)=2xe^{-\frac{x^2}{2}}\Leftrightarrow\left[e^{\frac{x^2}{2}}f(x)\right]'=2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=\int 2xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=-2e^{-\frac{x^2}{2}}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế được $C=0\Rightarrow f(x)=-2e^{-x^2}$

Vậy $f(1)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$.

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$(x+1)f'(x)+f(x)=1,\ \forall x\in[0;1]$ và $f(0)=2$. Tính $\int_0^1 f(x)dx$.

Lời giải: Chia cả hai vế của giải thiết cho $x+1$ ta được

$$f'(x)+\frac{1}{x+1}f(x)=\frac{1}{x+1}. \qquad (2.3)$$

Ta có $p(x)=\frac{1}{x+1}$ nên $\int p(x)dx=\ln|x+1|$, nhân cả hai vế của (2.3) với $e^{\ln|x+1|}=x+1$ ta được

$$\begin{aligned}&f(x)+(x+1)f'(x)=1\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)'f(x)+(x+1)f'(x)=1\\ \Leftrightarrow\ &\left[(x+1)f(x)\right]'=1\\ \Leftrightarrow\ &\int\left[(x+1)f(x)\right]'dx=\int dx\\ \Leftrightarrow\ &(x+1)f(x)=x+C\end{aligned}$$

Theo giải thiết ta có $f(0)=2$ nên $1.f(0)=C \Rightarrow C=2$.

Khi đó $(x+1)f(x)=x+2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$.

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \dfrac{x+2}{x+1}dx=\int_0^1\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(x+\ln|x+1|\right)\Big|_0^1=1+\ln 2$.

Bình luận thêm: Bằng cách sử dụng lý thuyết liên quan đến phương trình vi phân với biến số phân ly và phương trình vi phân tuyến tính, chúng tôi đưa ra sự tồn tại hàm và lời giải như trên. Phương trình với biến số phân ly và phương trình vi phân tuyến tính thỏa mãn điều kiện về tính tồn tại và duy nhất nghiệm [2], nên sẽ luôn luôn tích phân hai vế được. Hơn thế nữa, thông qua cách giải trên, chúng tôi thấy một phương trình vi phân tuyến tính sau khi nhân thêm một đại lượng trở thành phương trình vi phân toàn phần [2]. Ý tưởng của lời giải trên xuất phát từ cách giải phương trình vi phân toàn phần.

2.3.5. Sử dụng phương trình hàm

Nhận dạng: Trong phần này, sử dụng các bài toán tích phân hàm ẩn, mà hàm dưới dấu tích phân thỏa mãn phương trình

$a(x)f(x)+b(x)f(p-x)=c(x)$.

Phương pháp: Bằng cách lấy tích phân hai vế và sử dụng tính chất của tích phân trong ta thu được lời giải bài toán.

Sử dụng một số đề bài lấy từ tài liệu [5], chúng tôi xây dựng được các ví dụ minh họa sau:

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$. Tính $I=\int_0^1 f(x)dx$ biết $f(x)$ thỏa mãn

$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned}&2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}\\ &\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx+3\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x}dx\\ &\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\sqrt{1-x}dx-3\int_0^1 f(1-x)dx\end{aligned}$$

Đặt $t=1-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=1\Rightarrow t=0\end{cases}$.

Khi đó

$$\int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Nên

$$5\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = \frac{2}{3}.\sqrt[3]{(1-x)^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Vậy $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{15}$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$ biết $f(x)$ thỏa mãn

$$3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}.$$

<u>Lời giải:</u> Ta có

$$3f(x) - f(-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 \left[3f(x) - f(-x)\right]dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}dx$$

$$\Leftrightarrow 3\int_{-1}^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^1 f(-x)\,dx = \ln 3.$$

Đặt $t = -x \Rightarrow dx = -dt$. Đổi cận: $\begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$

Khi đó $\int_{-1}^1 f(-x)\,dx = -\int_1^{-1} f(-t)\,dt = \int_{-1}^1 f(t)\,dt = \int_{-1}^1 f(x)\,dx.$

$$3\int_{-1}^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^1 f(-x)\,dx = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow 3\int_{-1}^1 f(x)\,dx - \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \ln 3$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)\,dx = \frac{\ln 3}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\ln 3}{2}$.

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[1,2]$. Tính $I=\int_1^2 f(x)dx$ biết $f(x)$ thỏa mãn

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$$

Lời giải: Đặt $\frac{1}{x}=t\Rightarrow x=\frac{1}{t}$.

Khi đó $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}$ hay $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$.

Ta được hệ phương trình $\begin{cases} f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x \\ 2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x} \end{cases}$

Giải hệ phương trình, ta được $f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$.

Vậy $I=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \frac{2-x^2}{3x}dx=\int_1^2\left(\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}\right)dx=\left(\frac{2\ln|x|}{3}-\frac{x^2}{6}\right)\Bigg|_1^2=\frac{2\ln 2}{3}-\frac{1}{2}$.

Bình luận thêm: Ở ví dụ cuối cùng, bằng cách sử dụng phép thế biến được trình bày ở phần kiến thức chuẩn bị, ta hoàn toàn chỉ ra được hàm số thỏa mãn yêu cầu đầu bài. Với việc chỉ ra đó, ta sẽ làm được bài toán. Tuy nhiên, hai ở ví dụ trước, ta không khai thác theo hướng đó mà sử dụng phương pháp liên quan đến phương trình hàm để tinh giản quá trình tính toán. Ở dạng này, sinh viên/giáo viên có thể hướng dẫn học sinh chỉ ra sự tồn tại hàm số bằng cách như sau: Với ví dụ

$$2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x},$$

ta chọn $x=0$ và $x=1$, từ đó ta có hệ

$$\begin{cases} 2f(0)+3f(1)=1 \\ 2f(1)+3f(0)=0 \end{cases}$$

Hệ này chắc chắn có nghiệm duy nhất nên đảm bảo tính xác định và đơn trị của hàm f(x) trong biểu thức trên. Điều này giúp giảm bớt áp lực về tư duy liên quan đến phương trình hàm – phần kiến thức nặng của bồi dưỡng học sinh giỏi toán THPT.

3. KẾT LUẬN

Bài viết đã làm rõ hai câu hỏi lớn liên quan đến tích phân hàm ẩn thông qua đề xuất các dạng bài và phương pháp giải. Trong mỗi dạng bài, các tác giả đã trình bày các ví dụ minh họa, phân tích để làm rõ những kiến thức. Qua đó, chúng tôi mong muốn đóng góp một tài liệu để các bạn sinh viên sư phạm Toán hiểu hơn về tích phân hàm ẩn, góp phần phát triển năng lực chuyên môn môn Toán cho các bạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Tài Chung, *Bồi dưỡng học sinh giỏi phương trình hàm,* NXB ĐH Quốc gia Hà Nội, 2009.
2. Nguyễn Thế Hoàn, Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định*, NXB Giáo dục, 2009.
3. Nguyễn Văn Mậu (chủ biên), Một số chuyên giải tích bồi dưỡng học sinh giỏi THPT, NXB Giáo dục, 2010
4. Trần Đức Long (chủ biên), *Giáo trình giải tích tập 2: Tích phân không xác định, tích phân xác định, tích phân suy rộng chuỗi số, chuỗi hàm*, NXB ĐH Quốc gia Hà Nội, 2008.
5. Website https://toanmath.com/nguyen-ham-tich-phan, cập nhật ngày 20/07/2022.

METHODS OF SOLVING IMPLICIT INTEGRAL TO DEVELOP THINKING ABILITY FOR STUDENTS OF FACULTY MATHEMATICS, HANOI PEDAGOGICAL UNIVERSITY OF NUMBER 2

Pham Thanh Giang, Duong Thu Huong, Nguyen Van Manh, Tran Thi Thu

Abstract: *Mathematics has good conditions to develop thinking and reasoning for students in general, and mathematical thinking and reasoning ability in particular. This study aims to help find some methods to develop mathematical thinking and reasoning for math students through teaching the topic "Integral of implicit function". These measures focus on training and fostering thinking manipulation for students through organizing students to solve a class of difficult content problems, often in the exam questions in national for students. These measures not only help develop students' thinking but also help students practice math skills.*

Keywords: *Mathematics subject, integral of implicit function, composite function, differential equation, functional equation.*

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 28-01-2024; ngày phản biện đánh giá: 26-02-2024; ngày chấp nhận đăng: 15-3-2024)